22.10.14.

Πρόταση ολικής σύγκλισης.

Έστω $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in C^2[a,\infty)$ τ.ω. $f(a)<0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ $\forall x \in [a,\infty)$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει μοναδική ρίζα p της f και είναι απλή. Η ακολουθία που παράγει η μέθοδος Νεύτωνα, συγκλίνει για κάθε $x_0 \in [a,\infty)$.

Αν $x_0<p$: $f(x_1) = \underbrace{f(x_0)+(x_1-x_0)f'(x_0)}_{0} + \overbrace{\frac{(x_1-x_0)^2}{2} f''(\xi)}^{>0}$, ξ μεταξύ x_0, x_1.

$\Rightarrow x_1 > p$.

Υποθέτουμε ότι $x_0>p$.

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 < x_0$, $0=f(p)=f(x_1)+(p-x_1)f'(x_1)+\underbrace{\frac{(p-x_1)^2}{2} f''(\xi)}_{>0}$

$\Rightarrow f(x_1)+(p-x_1)f'(x_1)<0 \Leftrightarrow p-x_1<0 \Leftrightarrow p<x_2$.

σημείωση.

- $f(x_0)+(p-x_0)\cdot f'(x_0)<0 \Leftrightarrow p-x_0 < -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Leftrightarrow p < x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$.

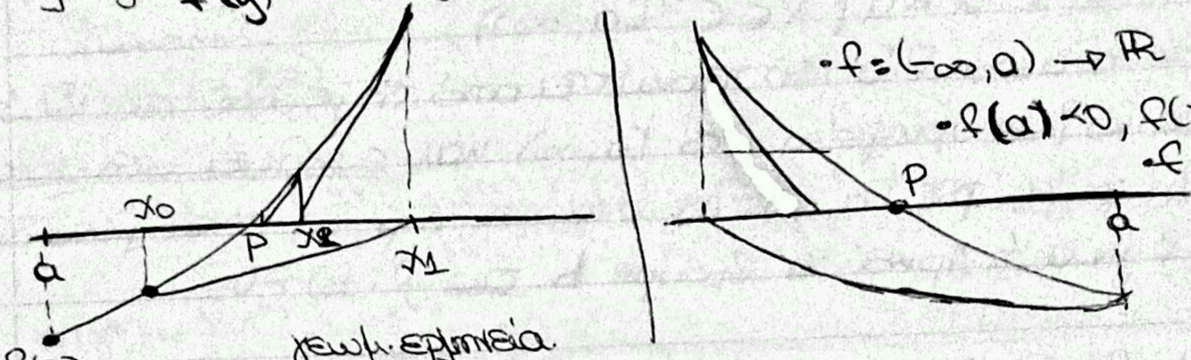
$\Rightarrow x_0 > p \Leftrightarrow x_1 \in (p, x_0)$

Επαγωγικά αν $x_n > p$ τότε $x_{n+1} \in (p, x_n)$

$\Rightarrow$ Η (x_n) είναι φθίνουσα κ' φραγμένη από το $p \Rightarrow$ συγκλίνει.

Έστω y το $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) \Leftrightarrow$

$y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Leftrightarrow f(y) = 0 \Leftrightarrow y = p.$



γεωμ. ερμηνεία.

- $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$
- $f(a) < 0$, $f(x) < 0$
- $f''(x) > 0$

• Αν η ρίζα της f είναι πολλαπλής m τότε η σύγκλιση είναι γραμμική. $(f \in C^m(I))$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \dots + \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n1}) = \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(x^*) + \dots + \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n2}) = $$
$$= \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot f^{(m)}(\xi_{n2})$$

ξ_{n1}, ξ_{n2} μεταξύ x_n και x^*.

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{\frac{(x_n - x^*)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(\xi_{n1})}{\frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f''(\xi_{nn})} \Rightarrow$$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(\xi_{n1})}.$$

• $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \dfrac{1}{m} < 1.$

Άσκηση 2.25: Έστω x^* είναι ρίζα μιας αρκετά ομαλής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, πολλαπλότητας m, τότε η παραλλαγή μεθόδου Νεύτωνα

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2\ldots$$

συγκλίνει στη ρίζα x^* για x_0 αρκετά κοντά στο x^* κ' η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Υποθέτω $\underline{f \in C^{m+1}(I)}$

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - m\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x^* - m\frac{\frac{(x_n-x^*)^m}{m!}f^{(m)}(x^*) + \frac{(x_n-x^*)}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\xi_{n1})}{\frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^m}{m!}\circledast}$$

$\circledast$ $\boxed{\cdot f^{(m+1)}(\xi_{n2})}$

$$= x_n - x^* - \frac{(x_n-x^*)f^{(m)}(x^*) + \frac{1}{m+1}\cdot(x_n-x^*)^2 f^{(m+1)}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(x^*) + \frac{(x_n-x^*)}{m}f^{(m+1)}f(\xi_{n2})} =$$

$$= \frac{\frac{(x_n-x^*)^2}{m}\cdot f^{(m+1)}(\xi_{n2}) - \frac{1}{m+1}\cdot(x_n-x^*)^2 f^{m+1}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(x^*) + \frac{x_n-x^*}{m}f^{(m+1)}(\xi_{n2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{m}\cdot f^{(m+1)}(\xi_{n2}) - \frac{1}{m+1}\cdot f^{(m+1)}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(x^*) + \cancel{\frac{x_n-x^*}{m}}f^{(m+1)}(\xi_{nn})} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)f^{(m+1)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)} = \frac{1}{m(m+1)}\cdot\frac{f^{(m+1)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)}.$$

Η μέθοδος Νεύτωνα για την εύρεση της $\sqrt{a}$, $a>0$.

Να αποδειχτεί ότι συγκλίνει $\forall\, x_0>0$.

Απόδειξη.

$$f(x) = x^2 - a = 0, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \; n=0,1,2\ldots x_0>0.$$

(αλγόριθμος που εκτελεί το computeraki :P)

$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(0) = -a<0$, $f'(x) = 2x>0$, $\forall\, x>0$.

και $f''(x)>0$. Πληρείται η πρόταση ολικής σύγκλισης στο $[0,\infty)$ ~ συγκλίν

- $x_0 > 0$, $x_1 - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_0 - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x_0}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_0} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}\right)^2 > 0. \Rightarrow x_1 > \sqrt{a}$

- $x_n > \sqrt{a}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = -\frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) = -\frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a)$
$< 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n.$